Peer Reviewed, Open Access, Free Online Journal
Published monthly : ISSN: 2308-832X
Issue 6(39); June 2016

Original Article: PROBLEMA GENERALIZZATO DEL ALBERO RICOPRENTE MINIMO

Citation
Sdvizhkov O.A. Matsnev N.P. Problema generalizzato del albero ricoprente minimo. *Italian Science Review*. 2016; 6(39). PP. 36-39.
Available at URL: http://www.ias-journal.org/archive/2016/june/Sdvizhkov.pdf

Authors
Oleg A. Sdvizhkov, Russian State University of Tourism and Service, Russia.
Nikolai P. Matsnev, University of Technology, Russia.

Submitted: May 29, 2016; Accepted: June 14, 2016; Published: June 30, 2016

Il problema classico della albero ricoprente minimo di un grafo pesato G (A, U), dove gli archi peso matrice coefficienti $C = (c_{ij})$ ha forma $C^T = C$, $c_{ij} \geq 0$, $c_{ii} = 0$, dove $i, j = 1,2,..,n$, come è ben noto [1 - 3], è quello di trovare un albero (nucleo) avente la quantità minima di archi peso coefficienti . Diciamo che il problema di minimo generalizzato spanning tree, $C^T \neq C$ e $T(A,V) \subseteq G$ - albero orientato (ortree) nel senso di [2, p. 238]. Per questo compito, gli algoritmi classici non sono applicabili. Nell'articolo viene ridotto al problema di programmazione quadratica.

1. I numeri vettore di vertici, la risultante albero attraversamento

Dato un albero T, i cui vertici sono numerati $1, 2,..., n$. Costruiamo il grafico albero T, ponendo la parte superiore del cerchio in ordine di numero, se si passa in senso orario, l'1 ipotizziamo radice [1].

Secondo [1] una radice albero binario piano avente n vertici, è un vettore di dimensione 2 (n-1), che è l'attraversamento di alberi ottenuto partendo dal nodo radice quando il primo passaggio è messo arco 0, e al ripetuto 1. Tuttavia, in questo approccio richiede nessun numero di conto dei vertici, e quindi non può tener conto dei pesi dei bordi.

Associamo l'albero cime numeri Vector T, che si $(v_1, v_2,..., v_{2n-1})$, $v_r \in \{1,2,..., n\}$, $r = \overline{1,2n-1}$ verificano quando attraversano T, partendo dall'alto 1 ($v_1 = v_{2n-1} = 1$), se si sposta in senso orario (per la strada giusta). Noi chiamiamo questo numero di codice albero vettore di vertici. Soddisfa le seguenti condizioni:

1) Ogni elemento non è inferiore a 1 e non più di n;

2) Ogni elemento successivo è diversa dalla precedente;

3) Ogni coppia di valori adiacenti si verifica una sola volta;

4) Se ci sono un paio α, β, poi ci sono un paio β, α.

Esempio 1. Trovare il codice dalle cime degli alberi numeri dati matrice di adiacenza:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Soluzione. Avere picchi 1, 2, 3, 4 in senso orario costruire nervature (1, 3), (2, 3), (3, 4). Scrivendo il numero di vertici incontrati durante l'attraversamento dell'albero in senso orario, partendo da quello superiore, si ottiene (1, 3, 2, 3, 4, 3, 1).

Risposta: (1, 3, 2, 3, 4, 3, 1)

Con il codice $(v_1, v_2, ..., v_{2n-1})$ compilato in modo univoco matrice $(2n-1) \times n$ binaria $X = (x_{rj})$,

$$x_{rj} = \begin{cases} 1, & v_r = j \\ 0, & v_r \neq j \end{cases} \quad (2)$$

Noi lo chiamiamo la sequenza matrice di vertici. In particolare, per un albero (1), avrà la forma:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Teorema 1. Gli elementi di T dell'albero adiacente $A = (a_{ij})$ espressa in termini di elementi di matrice X di formula:

$$a_{ij} = \sum_{i=1}^{2n-2} x_{ki} x_{k+1j} \quad (4)$$

Proof. Se la matrice di adiacenza $a_{i^* j^*}$ = 1, allora vi è il valore di r,

$$v_r = i^*, v_{r+1} = j^* \Rightarrow x_{ri^*} = 1,$$

$$x_{r+1j^*} = 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{2n-2} x_{ki^*} x_{k+1j^*} = x_{ri^*} x_{r+1j^*} = 1$$

cioè, l'ultima formula si ottiene lo stesso valore. $a_{i^* j^*}$ = 0 Se non vi è alcun valore di r tale che, $v_r = i^*, v_{r+1} = j^*$ come mezzo $\sum_{k=1}^{2n-2} x_{ki^*} x_{k+1j^*} = 0$.

In particolare, utilizzando la formula (4) alla matrice (3), si ottiene

(1): $a_{13} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$

$a_{31} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$

$a_{23} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$

$a_{32} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1$

$a_{34} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1$

$a_{43} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$

Altri articoli saranno pari a zero.

2. Riduzione del classico problema della albero ricoprente minimo ad una programmazione quadratica

Utilizzando il teorema 1, si dimostra il seguente teorema.

Teorema 2. Il problema della albero ricoprente minimo del grafo G si riduce ad un problema di programmazione quadratica con variabili binarie $X = (x_{rj})$, in cui la funzione obiettivo

$$z = 0{,}5 \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_{ij} \to \min \quad (5)$$

coefficienti a_{ij} sono calcolati utilizzando la formula (4), limiti

$$\sum_{j=1}^{n} x_{rj} = 1; \quad \sum_{s=1}^{2n-1} x_{sj} \geq 1; \; a_{ij} - a_{ji} = 0 \quad (6)$$

Esempio 2. Trovare l'albero ricoprente minimo, se

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Soluzione. Introduciamo variabili binarie x_{rj}, $r = \overline{1{,}9}$, $j = \overline{1{,}5}$, la formula (4) si estendono attraverso questi fattori matrice di adiacenza:

$$a_{ij} = \sum_{i=1}^{8} x_{ki} x_{k+1j}$$

Scrivere la funzione obiettivo nella forma (5) dove n = 5, aggiungendo vincoli (6). Riducendo il numero di $r = \overline{2{,}8}$ variabili $x_{11} = x_{91}$, pensare e risolvere il compito, per esempio, usando l'aggiunta complesso Excel Risolutore, vediamo che la matrice di adiacenza di albero ricoprente minimo è della forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Risposta: (1, 3), (1, 5), (2, 4), (4, 5), $z_{\min} = 5$

3. I numeri vettore di vertici, le conseguenti archi fusione ortree

Un altro approccio per l'albero cime codificate da numeri è per produrre una $(i_1, i_2, ..., i_{2n-2})$ sequenza di numeri di archi di vertici $(i_1, i_2), (i_3, i_4)..., (i_{2n-3}, i_{2n-2})$ compresi in un albero diretto, il seguente algoritmo.

Algoritmo 1. Fase 1 è assunto h = 1.

Passo 2. Se il valore $h = 1$ dell'elemento i_{2h-1} è il numero nodo radice, e un valore $h > 1$ che è uguale al più piccolo dei numeri di vertici aventi vertici adiacenti $i_1, i_2, ..., i_{2h-2}$, numeri non sono in sequenza $i_1, i_2, ..., i_{2h-2}$.

Fase 3: Il numero elemento i_{2h} è adiacente alla sommità del pinnacolo i_{2h-1}, che non è nella sequenza $i_1, i_2, ..., i_{2h-1}$, e se ci sono diversi picchi, il numero più basso.

Punto 4. Se $h < n-1$, allora h viene incrementato di 1 e passare al punto 2, fermata altro.

Ad esempio, la matrice (1) si ottiene il seguente codice dell'algoritmo 1 (1, 3, 3, 2, 3, 4). Noi chiamiamo questo approccio codificato collegando archi.

Sotto X, la matrice nel caso in cui il codice $(i_1, i_2, ..., i_{2n-2})$ capirà $(2n-2) \times n$ matrice $X = (x_{pj})$ binaria in cui

$$x_{pj} = \begin{cases} 1, & i_p = j \\ 0, & i_p \neq j \end{cases} \quad (8)$$

In particolare, per un albero (1), avrà la forma:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Teorema 3. Una matrice $(2n-2) \times n$ binaria $X = (x_{p\,j})$ è una matrice di codifica albero T da archi che uniscono, se le seguenti relazioni:

$$x_{2h-1\ j} + x_{2h\ j} \leq 1 \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{p\,j} = 1 \quad (11)$$

$$x_{2h-1j} \leq \sum_{k=1}^{2h-2} x_{k\,j}, \ h > 1 \quad (12)$$

$$x_{1\,j} + \sum_{h=1}^{n-1} x_{2h\ j} = 1 \quad (13)$$

Il teorema deriva dal fatto che la condizione (10) elimina il ciclo, in virtù della condizione (11) è uguale al numero di archi n-1, a condizione (12), se $x_{1\,j} = ... = x_{2h-2\,j} = 0$, che $x_{2h-1j} = 0$ fornisce connettività semplice, la condizione (13), eliminando loop.

Per analogia con Teorema 1 dimostriamo Teorema 4.

Teorema 4. Gli elementi della matrice di $A = (a_{ij})$ adiacenza ortree T espresso in termini di elementi (8) secondo $X = (x_{pj})$ la formula della matrice:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n-1} x_{2k-1\ i}\, x_{2k\ j} \quad (14)$$

Ad esempio, la formula (14) per la matrice (9), si ottiene:

$$a_{13} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$$

$$a_{32} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

$$a_{34} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

I calcoli di altri elementi danno $a_{ij} = 0$.

4. Riduzione del problema generalizzato della albero ricoprente minimo ad una programmazione quadratica

In vista di teoremi 3 e 4 si dimostra il seguente teorema.

Teorema 5. Il problema generalizzato della albero ricoprente minimo del grafo G si riduce ad un problema di programmazione quadratica con variabili binarie $X = (x_{p\,j})$, che

$$z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_{ij} \to \min \quad (15)$$

coefficienti sono calcolati secondo la formula (14), le restrizioni (10, 11, 12, 13).

Teorema 5 tiene a seconda del caso $C^T \neq C$ e il caso $C^T = C$.

Esempio 3. Trovare la matrice (7) albero ricoprente minimo orientato.

Soluzione. Introduciamo variabili binarie x_{pj}, $p = \overline{1,8}$, $j = \overline{1,5}$, la formula (14) si estendono attraverso queste matrici di adiacenza fattori:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{4} x_{2k-1\,i}\, x_{2k\,j}$$

Scrivi condizione per la funzione obiettivo della forma (15), dove n = 5, l'aggiunta di restrizione (10 - 13). Riducendo il numero $p = \overline{2,8}$ di variabili $x_{11} = 1$, tenendo conto $x_{12} = x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0$, e risolvere il compito, arriviamo al Spanning Tree minima basata matrice di adiacenza:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Risposta: (1, 3), (1, 5), (5, 2), (5, 4), $z_{\min} = 5$

Esempio 4. Trova l'albero di copertura minima orientato se

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 9 \\ 6 & 0 & 9 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 7 \\ 4 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Introduciamo variabili binarie $x_{p\,j}$, $p = \overline{1,6}$, $j = \overline{1,4}$, usiamo la formula (14):

$$a_{ij} = x_{1i} x_{2j} + x_{3i} x_{4j} + x_{5i} x_{6j}$$

Write condizione (15), dove n = 4. L'aggiunta di restrizioni (10 - 13):

$x_{11} + x_{21} \le 1$, $x_{12} + x_{22} \le 1$, $x_{13} + x_{23} \le 1$,
$x_{14} + x_{24} \le 1$, $x_{31} + x_{41} \le 1$, $x_{32} + x_{42} \le 1$,
$x_{33} + x_{43} \le 1$, $x_{34} + x_{44} \le 1$, $x_{51} + x_{61} \le 1$,
$x_{52} + x_{62} \le 1$, $x_{53} + x_{63} \le 1$, $x_{54} + x_{64} \le 1$,
$x_{p1} + x_{p2} + x_{p3} + x_{p4} \le 1$,
$x_{31} - (x_{11} + x_{21}) \le 0$, $x_{32} - (x_{12} + x_{22}) \le 0$,
$x_{33} - (x_{13} + x_{23}) \le 0$, $x_{34} - (x_{14} + x_{24}) \le 0$,
$x_{51} - \sum_{k=1}^{4} x_{k1} \le 0$, $x_{52} - \sum_{k=1}^{4} x_{k2} \le 0$,
$x_{53} - \sum_{k=1}^{4} x_{k3} \le 0$, $x_{54} - \sum_{k=1}^{4} x_{k4} \le 0$,
$x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j} = 1$.

Risolvere il compito, si ottiene:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Risposta: (1, 2), (2, 4), (4, 3), $z_{\min} = 6$.

References:

1. Gavrilov G.P., Sapozhenko A.A. 2005.Exercises on Discrete Mathematics.
2. Novikov F.A. 2000. Discrete mathematics for computer programmers.
3. Sdvizhkov O.A. 2012. Discrete mathematics and mathematical methods in economics using VBA Excel.