



Оценки числа неизоморфных комплексов заданного вида

С. А. Лавренченко, А. Ю. Щиканов

lawrencenko@hotmail.com, au2u@ya.ru

Российский государственный университет туризма и сервиса, Черкизово

Пусть V — заданное конечное множество, содержащее $|V| = n$ элементов, которые называются *вершинами*. Абстрактным симплициальным комплексом (или просто *комплексом*) с множеством вершин V называется подмножество $\mathcal{K}$ множества $\mathcal{P}(V)$ всех подмножеств множества V такое, что наряду с каждым элементом из $\mathcal{K}$, называемым *гранью* комплекса, в $\mathcal{K}$ содержатся и все непустые подмножества этого элемента. Другими словами, каждая грань грани комплекса сама является гранью комплекса.

Мы рассматриваем комплексы, являющиеся *основными* подкомплексами (т.е. подкомплексами с множеством вершин V) заданного вида или, как мы говорим, заданного *класса* в полном абстрактном симплициальном комплексе $\mathcal{P}(V)$. Два таких подкомплекса $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ называются *изоморфными*, если между ними существует *изоморфизм*, т.е. подстановка φ множества V такая, что φ переводит грани $\mathcal{K}_1$ на грани $\mathcal{K}_2$, а φ^{-1} переводит грани $\mathcal{K}_2$ на грани $\mathcal{K}_1$. Класс подкомплексов задается его характеристическими *инвариантными* свойствами, т.е. свойствами, сохраняющимися при изоморфизмах. В дальнейшем мы будем называть эти подкомплексы просто комплексами.

Примеры классов комплексов: (а) класс деревьев с данным множеством вершин, (б) класс общих *простых* (т.е. без петель и кратных ребер) графов с данным множеством вершин, (в) класс триангуляций поверхности (или поверхностей) с данным полным графом K_n .

Все подстановки множества V образуют полную симметрическую группу S_n . Пусть Ξ_n обозначает заданный класс вершинно-помеченных комплексов с заданным множеством вершин V , в котором два комплекса считаются различными, если в одном из них найдется грань $\{v_1, \dots, v_k\}$ такая, что вершины с этими метками в другом комплексе грань не образуют. Поскольку класс Ξ_n задан инвариантными свойствами его членов, группа S_n свободно действует на Ξ_n , т.е. каждая подстановка $\varphi \in S_n$ переводит любой комплекс $\mathcal{K} \in \Xi_n$ на комплекс $\varphi(\mathcal{K}) \in \Xi_n$. Те из подстановок S_n , которые переводят фиксированный комплекс $\mathcal{K}$ на себя, образуют его так называемую *группу автоморфизмов*, обозначаемую $\text{Aut}(\mathcal{K})$. Далее, обозначим через $\Omega_n = \{\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_r\} \subseteq \Xi_n$ множество орбит при указанном действии группы. Здесь $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_r$ — представители этих орбит, т.е. все попарно неизоморфные комплексы заданного типа. В описанной ситуации алгебраическая формула разложения на орбиты записывается следующим образом:

$$|\Xi_n| = \sum_{i=1}^{|\Omega_n|} \frac{|S_n|}{|\text{Aut}(\mathcal{K}_i)|} = \sum_{i=1}^{|\Omega_n|} \frac{n!}{|\text{Aut}(\mathcal{K}_i)|}, \quad (1)$$