случаю $A = D_f$, (обобщённая производная Гельфонда-Леонтье $f_1(\lambda) = f(\lambda z)$, соответствует обобщённый ряд (1).

Имеет место следующее утверждение, являющаяся обобщен теоремы единственности Шварца-Леонтьева.

Теорема единственности. Пусть A – линейный опера действующий в H, имеет порядок $\beta(A) > 0$. И пусть $\varphi(\lambda)$ – целая скаляр функция порядка роста $\rho(\varphi) < \dfrac{1}{\beta(A)}$, имеющая бесконечно много нулей и все они простые. Если $d_j(F) = 0,\ j = 1,2\ldots$, то $x = 0$.

Отметим, что в этой теореме содержится в качестве частных слу ряд теорем единственности А.Ф. Леонтьева, доказанных им для ря экспонент и обобщённых экспонент в пространствах целых функций.

Литература.

1. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М., Наука, 1976.
2. Леонтьев А.Ф. *Обобщения рядов экспонент.* М., Наука, 1981.
3. Громов В.П. *Порядок и тип линейного оператора разложение в ряд собственным функциям.* ДАН СССР, 1986, с. 27-31.
4. Громов В.П. *Интерполирующая функция. Свойства и применение.* Учё записки, Орёл, Учёные записки ОГУ, 2001, вып. 2, с. 4-27.
5. Schwartz L *Theorie generale des fonctions moyennes periodigues*. Ann. M 1947, vol.48, p.857-929.

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ВЯЗКОС

Дьяконов С.Н., Ставцева О.В., Чаусов Д.Н.

Орловский государственный университет

Приводится полное уравнение Навье-Стокса в терминах скорости и давле которое описывает неустановившееся движение несжимаемой среды с перемен коэффициентом динамической вязкости с учетом объемных массовых сил. осесимметричного и плоскопараллельного нестационарных течений указан уравнение впервые представлено в терминах функции тока в произвольной пра ортогональной системе криволинейных координат вращения и записывается нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных четвер порядка. Полученные формулы могут найти широкое применение для у нелинейных и нестационарных эффектов в различных прикладных зада обтекания реагирующих с потоком частиц, когда решение проводится криволинейной системе координат вращения (сферической, сфероидаль цилиндрической, бисферической, тангенциально-сферической, тороидальной и т.

Исследование особенностей движения несжимаемой жидкости переменной вязкостью представляет теоретический и практический интер точки зрения различных геофизических и технических приложений течению полимерных расплавов [1], тиксотропных жидкостей [2] или извержению сильновязкой магмы [3]. В последнее время важным и актуальным представляется изучение динамики частиц при значительных перепадах температуры в их окрестности [4 – 10]. Неоднородное распределение температуры в окружающей среде может быть вызвано различными факторами, например, внешним градиентом температуры [11 - 13], полем электромагнитного излучения [14, 15], химической реакцией на граничной поверхности [16, 17], процессом радиоактивного распада вещества частицы и т. д. Нагретая поверхность гидрозольной частицы, как правило, оказывает значительное влияние на теплофизические характеристики окружающей среды (из всех коэффициентов переноса в жидкости только динамическая вязкость наиболее сильно зависит от температуры [12, 18, 19]). В результате вне частицы наблюдается существенная деформация векторного поля скоростей и скалярного распределения давления.

Векторное поле скоростей $\vec{v}(\vec{r},t)$ и распределение давлений $p(\vec{r},t)$ в точках $\vec{r}$ пространства при движении ньютоновской сплошной среды определяются из решения системы уравнений *Навье-Стокса* и неразрывности.

Для вывода основного динамического уравнения движения среды применим к жидкому объему τ с массой m, теорему об изменении главного вектора количества движения системы материальных частиц $\vec{K}$, равного интегралу от произведений их элементарных масс dm на векторы скоростей $\vec{v}$

$$\vec{K} = \int_m \vec{v}\,dm = \int_\tau \rho\vec{v}\,d\tau .$$

Приравнивая индивидуальную производную по времени от главного вектора количества движения главному вектору внешних массовых и поверхностных сил, получим

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \int_\tau \rho\vec{f}\,d\tau + \int_S \vec{p}_n\,dS ,$$

где $\vec{f}$ – плотность распределения объемных сил, $\vec{p}_n$ – вектор напряжения, приложенный к лицевой стороне площадки dS.

Предполагая, что приток массы отсутствует, запишем уравнение динамики сплошной среды "в напряжениях"

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}\nabla)\vec{v} = \rho\vec{f} + \frac{\partial\vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{p}_z}{\partial z} .$$

Используя реологический закон ньютоновской несжимаемой вязкой жидкости [20], имеем дифференциальное уравнение *Навье-Стокса* в терминах скорости $\vec{v}(\vec{r},t)$ и давления $p(\vec{r},t)$

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{v}\nabla)\vec{v}=\rho\vec{f}-\nabla p+\eta\Delta\vec{v}+\nabla\times(\vec{v}\times\nabla\eta)+\nabla(\vec{v}\nabla\eta)-\vec{v}\Delta\eta, \qquad (1)$$

которое является нелинейным, так как второе слагаемое в левой части происходит от инерционного квадратичного по *Стоксу* члена $(\vec{v}\nabla)\vec{v}$.

Осесимметричное течение.

Пусть в произвольной правой ортогональной системе криволинейных координат (q_1,q_2,φ) вращения точка $\vec{r}=(x,y,z)$ наблюдения удалена от оси z симметрии движения на расстояние γ, а через $\varphi=q_3$ обозначается азимутальный угол проекции этой точки на плоскость $z=0$. Метрические коэффициенты (h_1,h_2,h_3) определяются с помощью формул [21]

$$\frac{1}{h_i}=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial\gamma}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}, \quad i=1;2;3.$$

В осесимметричном случае скорость $\vec{v}$ и объемная массовая сила $\vec{f}$ являются полярными векторами.

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial\varphi}=0, \quad \vec{e}_\varphi\vec{v}=0.$$

Условие несжимаемости среды позволяет ввести скалярную однозначную функцию тока $\Psi=\Psi(\vec{r},t)$, которая удовлетворяет соотношениям [21]

$$v_1=-h_2h_3\frac{\partial\Psi}{\partial q_2}, \quad v_2=h_1h_3\frac{\partial\Psi}{\partial q_1}.$$

Известные формулы векторного анализа позволяют уравнение (1) записать в терминах функция тока

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(E^2\Psi\right)+\rho\frac{h_1h_2}{\gamma^2}\left\{\gamma\frac{\partial(\Psi,E^2\Psi)}{\partial(q_1,q_2)}-2\left(E^2\Psi\right)\frac{\partial(\Psi,\gamma)}{\partial(q_1,q_2)}\right\}-\rho h_1h_2\gamma\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{f_2}{h_2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{f_1}{h_1}\right)\right\}=$$
$$=\eta E^4\Psi+\left(h_1^2\frac{\partial\eta}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_1}+h_2^2\frac{\partial\eta}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)\left(E^2\Psi\right)+E^2\left(h_1^2\frac{\partial\eta}{\partial q_1}\frac{\partial\Psi}{\partial q_1}+h_2^2\frac{\partial\eta}{\partial q_2}\frac{\partial\Psi}{\partial q_2}\right)-$$
$$-h_1h_2h_3\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial\eta}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_2}{h_3h_1}\frac{\partial\eta}{\partial q_2}\right)\right\}E^2\Psi-\left(h_1^2\frac{\partial\Psi}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_1}+h_2^2\frac{\partial\Psi}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)\Delta\eta, \qquad (2)$$

или в операторной форме

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(E^2\Psi\right)+\rho\frac{h_1h_2}{\gamma^2}\left\{\gamma\frac{\partial(\Psi,E^2\Psi)}{\partial(q_1,q_2)}-2\left(E^2\Psi\right)\frac{\partial(\Psi,\gamma)}{\partial(q_1,q_2)}\right\}-\rho h_1h_2\gamma\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{f_2}{h_2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{f_1}{h_1}\right)\right\}=$$
$$=\eta E^4\Psi+(\nabla\eta)\nabla\left(E^2\Psi\right)+E^2\left((\nabla\Psi)\nabla\eta\right)-(\Delta\eta)E^2\Psi-(\nabla\Delta\eta)\nabla\Psi,$$

где осесимметричные линейные дифференциальные операторы второго порядка *Стокса* и *Лапласа* определяются формулами [21]

$$E^2=\frac{h_1h_2}{h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)\right\},$$

$$\Delta = h_1 h_2 h_3 \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_2}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \right\}.$$

К обеим частям динамического уравнения

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla v^2 + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} \right) = -\nabla p - \eta \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) + \nabla \times (\vec{v} \times \nabla \eta) + \nabla(\vec{v} \nabla \eta) - \vec{v} \Delta \eta,$$

которое представлено в терминах скорости $\vec{v}(\vec{r},t)$ и давления $p(\vec{r},t)$, применяем операцию дивергенция. Тогда скалярное поле давления в среде находится по известному распределению скоростей из решения уравнения типа Пуассона

$$\Delta p = \Delta\left(\vec{v}\nabla\eta - \frac{1}{2}\rho v^2 \right) - \rho\nabla((\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}) - \nabla(\eta\nabla \times (\nabla \times \vec{v})) - \nabla(\vec{v}\Delta\eta).$$

В результате имеем

$$p = -\frac{1}{2\gamma^2}\left(h_1^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \right)^2 + h_2^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \right)^2 \right) + h_1 h_2 h_3 \frac{\partial(\Psi, \eta)}{\partial(q_1, q_2)} + p_1, \quad (3)$$

$$\Delta p_1 = h_1 h_2 h_3 \left\{ \frac{\partial(E^2\Psi, \eta)}{\partial(q_1, q_2)} - \frac{\partial(\Psi, \Delta\eta)}{\partial(q_1, q_2)} \right\} + \rho \left\{ h_1^2 \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + h_2^2 \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right\} \frac{E^2 \Psi}{\gamma^2} + \quad (4)$$
$$+ \rho \frac{E^2 \Psi}{\gamma^2} \Delta \Psi.$$

Плоскопараллельное течение.

Рассмотрим плоскопараллельное установившееся движение вязкой несжимаемой среды

$$\vec{v}_z = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial z} = \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial t} = 0, \quad f_z = 0, \quad \frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial f_y}{\partial z} = 0.$$

В этом случае компоненты векторного поля скоростей запишутся так

$$v_1 = -h_2 \frac{\partial \Psi}{\partial q_2}, \quad v_2 = h_1 \frac{\partial \Psi}{\partial q_1}, \quad \vec{v} = \vec{e}_z \times \nabla \Psi,$$

где $\vec{e}_z$ - единичный вектор, перпендикулярный плоскостям течения, которые параллельны друг другу. При $h_3 = 1$ линейные дифференциальные операторы *Стокса* и *Лапласа* имеют одинаковую структуру

$$E^2 = \Delta = h_1 h_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \right\}.$$

Для плоскопараллельного течения функция тока удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных четвертого порядка

$$\eta \Delta^2 \Psi + \left(h_1^2 \frac{\partial \eta}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + h_2^2 \frac{\partial \eta}{\partial q_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \Delta \Psi + \Delta \left(h_1^2 \frac{\partial \eta}{\partial q_1} \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} + h_2^2 \frac{\partial \eta}{\partial q_2} \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \right) -$$

$$-h_1h_2\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial\eta}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial\eta}{\partial q_2}\right)\right\}\Delta\Psi-\left(h_1^2\frac{\partial\Psi}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_1}+h_2^2\frac{\partial\Psi}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)\Delta\eta=0 \quad (5)$$

или в операторной форме

$$\eta\Delta^2\Psi+(\nabla\eta)(\nabla\Delta\Psi)+\Delta((\nabla\Psi)\nabla\eta)-(\Delta\eta)\Delta\Psi-(\nabla\Delta\eta)\nabla\Psi=0.$$

Скалярное поле давления запишется так

$$p=p_1+h_1h_2h_3\frac{\partial(\Psi,\eta)}{\partial(q_1,q_2)},\ \Delta p_1=h_1h_2h_3\left\{\frac{\partial(E^2\Psi,\eta)}{\partial(q_1,q_2)}-\frac{\partial(\Psi,\Delta\eta)}{\partial(q_1,q_2)}\right\}. \quad (6)$$

Литература.

1. Скульский О.И., Славнов Е.В., Няшин Ю.И. В сб.: Конвективные течения и динамическая устойчивость. Свердловск, 1979. С. 87 – 89.
2. Pearson J.R.A. // J. Rheol. 1994. V. 38. № 2 P. 309 – 333.
3. Бармин А.А., Мельник О.Э. // Изв. РАН. МЖГ. 1993. Т. 2. С. 49-60.
4. Найденов В.И. // ПММ. 1971. Т. 38. В. 1. С. 162 – 166.
5. Яламов Ю.И., Щукин Е.Р., Попов О.А. // ДАН. 1987. Т. 297. № 1.С. 91 – 95.
6. Щукин Е.Р., Малай Н.В., Яламов Ю.И. // ТВТ. 1988. Т. 25. № 5. С. 1020 – 1024.
7. Яламов Ю.И., Малай Н.В., Щукин Е.Р.// ДАН, 2001, Т. 379, № 6.
8. Малай Н.В., Щукин Е.Р. // ЖТФ, 2003, Т. 73, № 9.
9. Малай Н.В. // ЖТФ, 2002, Т. 72, № 11 С. 35.
10. Малай Н.В, Щукин Е.Р., Яламов Ю.И. // ЖТФ, 2001, Т. 71, № 8, С. 13.
11. Яламов Ю.И., Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван, 1985. 207 с.
12. Щукин Е.Р. // ИФЖ. 1986. Т. 50. № 2. С. 681 – 683.
13. Щукин Е.Р., Малай Н.В. // ТВТ. 1990. Т. 28. № 4. С. 829.
14. Hidy G.M., Brock J.R. // Geophis. Res. 1967. V. 72. № 3. P. 455 – 460.
15. Яламов Ю.И., Кутуков В.Б., Щукин Е.Р. // ДАН. 1977. Т. 234. № 6. С. 1047 – 1050.
16. Рязанцев Ю.С. // Изв. АН. СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 180 – 183.
17. Головин А.М., Фоминых В.В. // МЖГ, № 1, 1983.
18. Ребиндер П.А. Статья "Вязкость" //Физический словарь Т. 2, БСЭ, 1960 г.
19. Бретшнайдер Ст. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М., 1966 г.
20. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973 г.
21. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: 1976 г.