

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОТРЫВНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ПЛАСТИНКИ

Проведено численное исследование начально-краевой задачи отрывного нестационарного обтекания пластинки. Представлены результаты расчета по алгоритму [1] решения задачи, учитывающего условия в точках схода вихревых следов. Использование этих условий позволяет корректно определять кинематические характеристики течения. Приведено сравнение с результатами решения данной задачи без учета условий в точках схода вихревых следов.

Ключевые слова: начально-краевая задача, нестационарное обтекание, отрывное обтекание пластины, численное исследование.

Отрывное нестационарное обтекание разомкнутого контура, в частности пластинки, исследовалось многими авторами. Главной особенностью такого течения является его нелинейность. Соответствующая начально-краевая задача обычно решается путем моделирования вихревых следов системой свободных дискретных вихрей и применения процедуры пошаговой дискретизации по времени [3; 5]. При таком подходе возникает проблема определения координат свободных дискретных вихрей, непосредственно сходящих с кромок контура. В настоящей работе приведены результаты численного исследования отрывного обтекания пластинки, в основе которого лежит алгоритм [1]. Особенностью этого алгоритма является то, что в нем учитываются нелинейные дифференциальные соотношения в точках схода вихревых следов с пластинки и условия непрерывности вихревых слоев, моделирующих контур и вихревые следы, в тех же точках. Именно эти соотношения позволяют более корректно определять координаты свободных дискретных вихрей и другие кинематические характеристики течения в любые моменты времени, в том числе и в начальные. Наряду с применением алгоритма [1], численное исследование включает в себя расчет кинематических характеристик течения с использованием априорного задания координат вихрей, непосредственно сходящих с кромок пластинки (см.: [3]). В работе приводится сравнение результатов расчета по вышеобозначенным алгоритмам.

1. Постановка задачи

Модель отрывного обтекания пластинки идеальной несжимаемой жидкостью рассмотрим в рамках нелинейной теории крыла в плоском нестационарном потоке. Постановка соответствующей начально-краевой задачи изложена в [2]. Приведем основные моменты постановки задачи отрывного нестационарного обтекания пластинки.

Пластинка L начинает свое движение из состояния покоя в начальный момент времени $t=0$. После начала движения $t>0$ пластинки L циркуляция скорости $\Gamma(t)$ вокруг нее меняется с течением времени, в результате чего с кромок пластинки сходят вихревые следы $L_{w1}(t)$, $L_{w2}(t)$, эволюционирующие во времени (рис. 1).

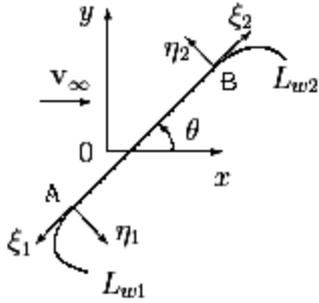


Рис. 1. Отрывное обтекание пластинки

Границами области течения жидкости является пластинка L , вихревые следы $L_{wj}(t)$, $j=1,2$ и бесконечно удаленная точка $z = \infty$. Движение жидкости вне пластинки и вихревых следов потенциально. Это позволяет сформулировать задачу для комплексной скорости, которая в области течения представляется интегралом Коши:

$$\bar{v}(z,t) = \bar{v}_\infty + \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{wj}(t)} \frac{\gamma_{wj}(\sigma,t) d\sigma}{z - z_{wj}(\sigma,t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\gamma(s,t) ds}{z - z(s)}, \quad (1)$$

где $z(s) \in L$, $z_{wj}(\sigma,t) \in L_{wj}(t)$, s, σ – дуговые координаты, $\gamma(s,t)$, $\gamma_{wj}(\sigma,t)$ – интенсивности вихревых слоев, моделирующих пластинку и вихревые следы соответственно.

В начальный момент времени $t=0$ предполагаем, что вихревые следы отсутствуют, комплексная скорость $\bar{v}(z,0) = 0$, циркуляция скорости $\Gamma(0) = 0$.

Граничными условиями в данной задаче является условие затухания возмущенной скорости в бесконечно удаленной точке (выражение (1) ему удовлетворяет), условие непротекания жидкости через пластинку L

$$\text{Im}\{e^{i\theta(z,t)} \bar{v}(z,t)\} = 0, \quad z \in L, \quad (2)$$

а также условия непрерывности давления и нормальной составляющей скорости жидкости при переходе через вихревые следы. Последнее выполняется, если вихревые следы свободно перемещаются вместе с жидкостью, т. е. если комплексная координата $z_{wj}(\sigma,t)$ вихря, сошедшего с кромки z_{*j} пластинки в некоторый момент времени τ ($0 \leq \tau < t$), определяется решением нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{d\bar{z}_{wj}(\sigma,t)}{dt} = \bar{v}(z_{wj}(\sigma,t), t) \quad (3)$$

с начальным условием

$$\bar{z}_{wj}(0, \tau) = \bar{z}_{*j}(\tau), \quad \tau \in [0, t)$$

и заданным полем скоростей в момент времени τ .

Для обращенного движения жидкости [6] в системе координат Oxy , связанной с пластинкой L , начально-краевая задача для комплексной скорости (1) сводится к системе нелинейных соотношений, в которую входят граничные условия (2), (3), а также

$$\frac{d}{dt} [\Gamma(t) + \sum_{j=1}^2 \Gamma_{wj}(t)] = 0; \quad (4)$$

$$\gamma_{wj}(0,t) = \gamma(s_{*j}, t), \quad s_{*1} = 0, \quad s_{*2} = l; \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \Gamma_j(t) = \gamma_{wj}(0,t) w_j(t). \quad (6)$$

Соотношение (4) представляет собой теорему Кельвина о постоянстве циркуляции скорости жидкости по замкнутому жидкому контуру, (5) – условие непрерывности интенсивностей $\gamma(s,t)$, $\gamma_{wj}(\sigma,t)$ вихревых слоев, моделирующих пластинку L и вихревые следы $L_{wj}(t)$ соответственно. Соотношение (6) выполняется в точках схода вихревых следов с пластинки и является ключевым в определении координат свободных дискретных вихрей, непосредственно соходящихся с пластинки в любой момент времени (подробнее об этом в [1]). Здесь

$$\Gamma(t) = \int_L \gamma(s,t) ds, \quad \Gamma_{wj}(t) = \int_{L_{wj}} \gamma_{wj}(\sigma,t) d\sigma,$$

где $w_j(t)$ – скорости схода вихревых следов $L_{wj}(t)$, сошедших с кромок пластинки L .

2. Метод решения

Численное решение нелинейной начально-краевой задачи основано на применении процедуры пошаговой дискретизации по времени, моделировании вихревых следов и пластинки системой дискретных вихрей [3] и определении координат свободных дискретных вихрей, непосредственно соходящихся с контура по алгоритму [1]. При этом краевая задача, возникающая на каждом шаге по времени, решается методом интегральных уравнений [4].

В ходе решения задачи определяются гидродинамические характеристики течения, включающие в себя координаты свободных дискретных вихрей, скорости схода и интенсивности вихревых следов в точках схода. Координаты свободных дискретных вихрей, сошедших с контура, перемещаются свободно вместе с жидкостью и определяют форму вихревого следа.

Под скоростью схода вихревого следа понимается проекция относительной скорости жидкости на касательную к контуру в точке схода. В случае обращенного движения относительная скорость жидкости в точке схода определяется соотношением

$$\bar{v}(z_{*j}) = e^{i\theta_j} (v_\sigma - iv_n), \quad j=1,2, \quad (7)$$

где θ_j – угол наклона касательной в точке схода z_{*j} к оси Ox , v_σ и v_n – касательная и нормальная составляющие скорости жидкости соответственно. Тогда, по определению, скорости схода вихревых следов с кромок контура есть

$$w_j = v_\sigma, \quad j=1,2. \quad (8)$$

Заметим, что скорости схода подчиняются следующему условию

$$w_j > 0, \quad j=1,2. \quad (9)$$

С другой стороны, скорости схода определяются соотношением (6). В зависимости от выбранных положений свободных дискретных вихрей, непосредственно сходящихся с контура в вихревой след, значения скоростей схода, вычисленные по формулам (6) и (7) могут различаться. В алгоритме [1] выполняется требование согласования соотношений (6) и (7), что позволяет корректно определять координаты дискретных вихрей, непосредственно сходящихся с контура, в любой момент времени.

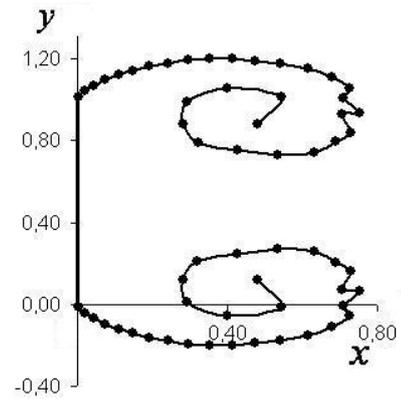
Для определенности в дальнейшем будем называть Алгоритмом 1 алгоритм [1], а Алгоритмом 2 алгоритм, в котором не учитывается соотношение (6) и координаты непосредственно сходящихся дискретных вихрей задаются априорно. В данном численном исследовании, в случае априорного задания координат, непосредственно сошедший дискретный вихрь располагался по касательной к пластинке, а скорости схода вычислялись по формулам (7), (8). Все остальные характеристики для обоих алгоритмов рассчитывались по одним и тем же формулам.

3. Результаты численного эксперимента

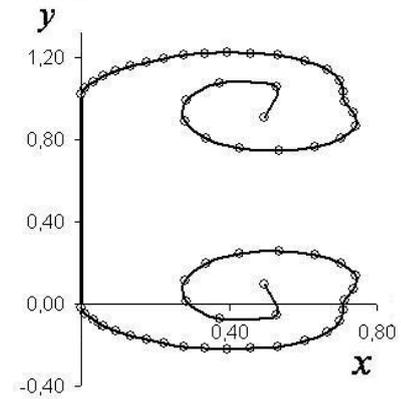
Результаты расчета по Алгоритмам 1 и 2 представлены на рисунках 2–10. Расчет рассматриваемых характеристик проводился для пластинки, установленной под углом $\theta = 30^\circ$, 60° , 90° . Момент времени t_n , для которого приведены результаты, соответствует прохождению потока жидкости, обтекающего пластинку, расстояния, равного длине пластинки.

На рисунках 2–4 показаны положения свободных дискретных вихрей. Из графиков видно, что формы вихревых следов, определенные по Алгоритмам 1 и 2, практически совпадают.

На рисунках 5–7 отображено изменение скоростей схода w_j , $j=1,2$ в зависимости от времени. Цифрами 1 и 2 обозначены графики, полученные при расчете по Алгоритмам 1 и 2 соответственно.

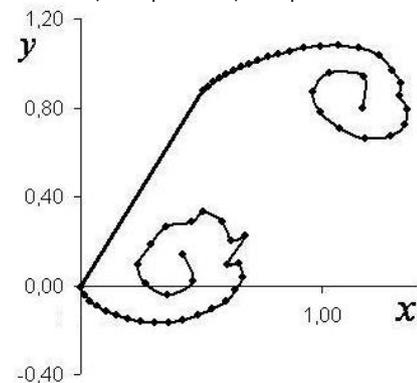


а

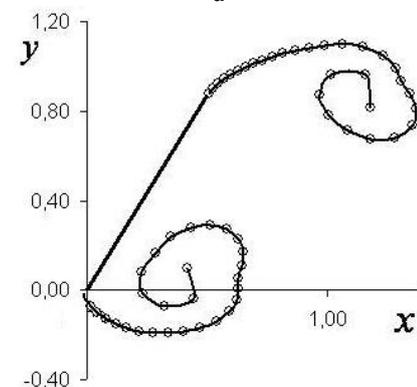


б

Рис. 2. Форма вихревых следов, угол наклона пластинки $\theta = 90^\circ$: а) Алгоритм 1; б) Алгоритм 2



а



б

Рис. 3. Форма вихревых следов, угол наклона пластинки $\theta = 60^\circ$: а) Алгоритм 1; б) Алгоритм 2

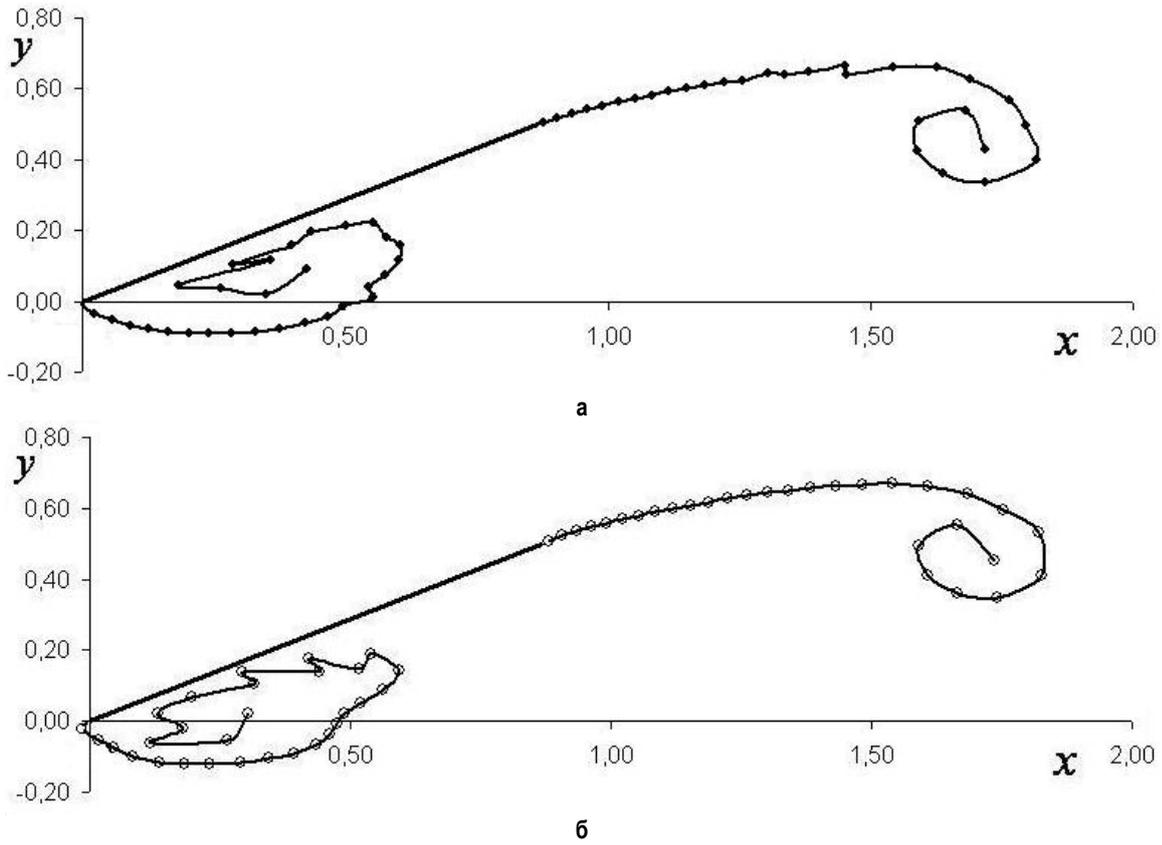


Рис. 4. Форма вихревых следов, угол наклона пластинки $\theta = 30^\circ$:
 а) Алгоритм 1; б) Алгоритм 2

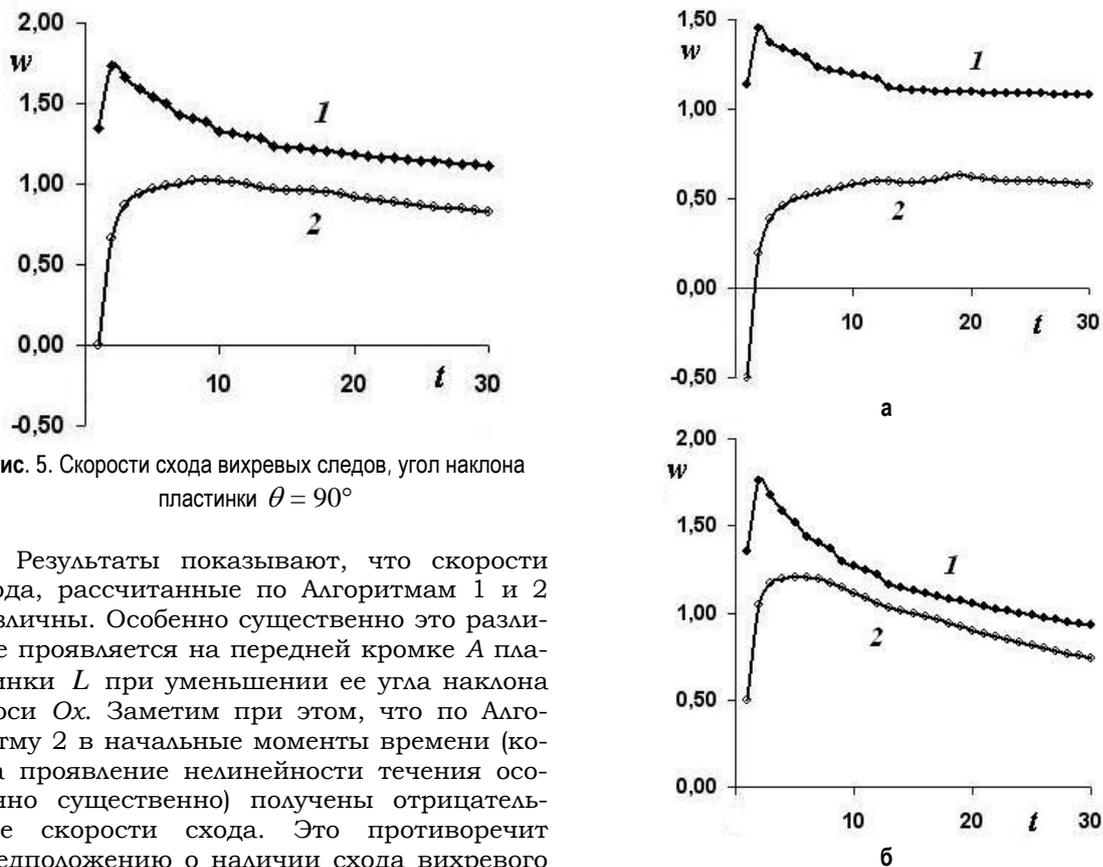


Рис. 5. Скорости схода вихревых следов, угол наклона пластинки $\theta = 90^\circ$

Рис. 6. Скорости схода вихревых следов, угол наклона пластинки $\theta = 60^\circ$:
 а) передняя кромка А; б) задняя кромка В

Результаты показывают, что скорости схода, рассчитанные по Алгоритмам 1 и 2 различны. Особенно существенно это различие проявляется на передней кромке А пластинки L при уменьшении ее угла наклона к оси Ox . Заметим при этом, что по Алгоритму 2 в начальные моменты времени (когда проявление нелинейности течения особенно существенно) получены отрицательные скорости схода. Это противоречит предположению о наличии схода вихревого следа с кромки А, т. е. условию (9), и не соответствует физической картине течения.

На задней кромке B наблюдаем обратное: чем меньше угол наклона пластинки L к оси Ox , тем меньшее отличие имеют значения скоростей схода. Действительно, при уменьшении угла наклона пластинки вихревой след, сходящийся с задней кромки B , стремится к сходу по касательной к пластинке.

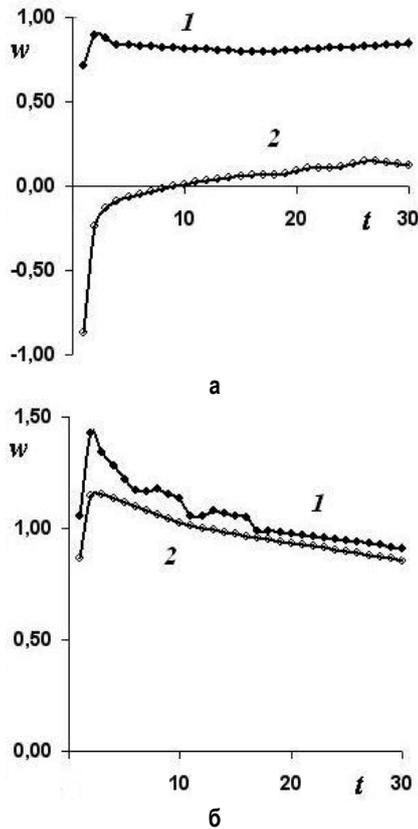


Рис. 7. Скорости схода вихревых следов, угол наклона пластинки $\theta = 30^\circ$: а) передняя кромка А; б) задняя кромка В

Графики на рисунках 8–10 представляют собой изменение по времени значений интенсивностей $\gamma_{wj}(0, t)$, $j = 1, 2$, вихревого слоя, моделирующего вихревой след, в точках схода.

Сравнение значений интенсивностей $\gamma_{wj}(0, t)$, рассчитанных по Алгоритмам 1 и 2, снова показывает их различие. Причем на передней кромке разность значений интенсивностей в точках схода вихревого следа увеличивается с уменьшением угла наклона пластинки L к оси Ox . Этот факт является следствием невыполнения в Алгоритме 2 условия (5) в общем случае.

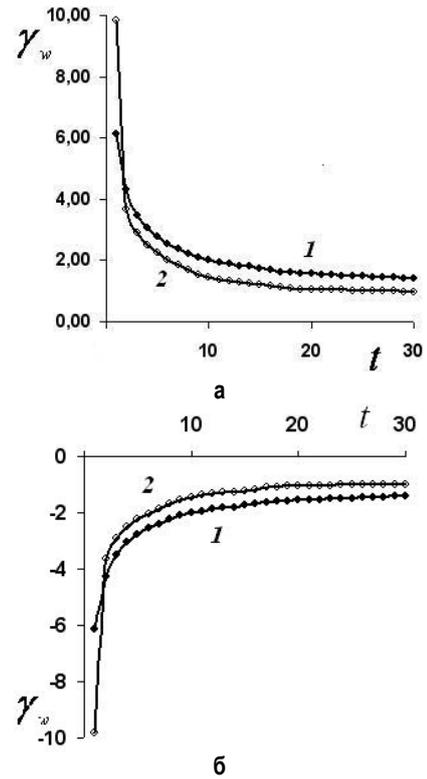


Рис. 8. Интенсивность вихревых следов в точках схода, угол наклона пластинки $\theta = 90^\circ$: а) передняя кромка А; б) задняя кромка В

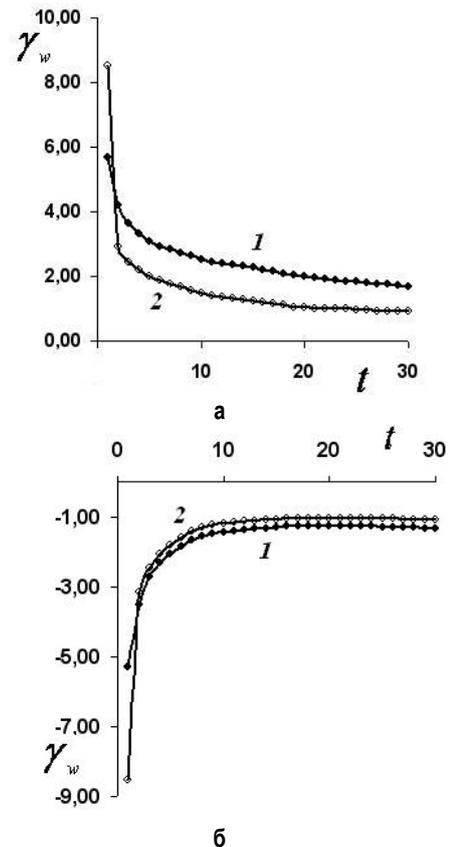


Рис. 9. Интенсивность вихревых следов в точках схода, угол наклона пластинки $\theta = 60^\circ$: а) передняя кромка А; б) задняя кромка В

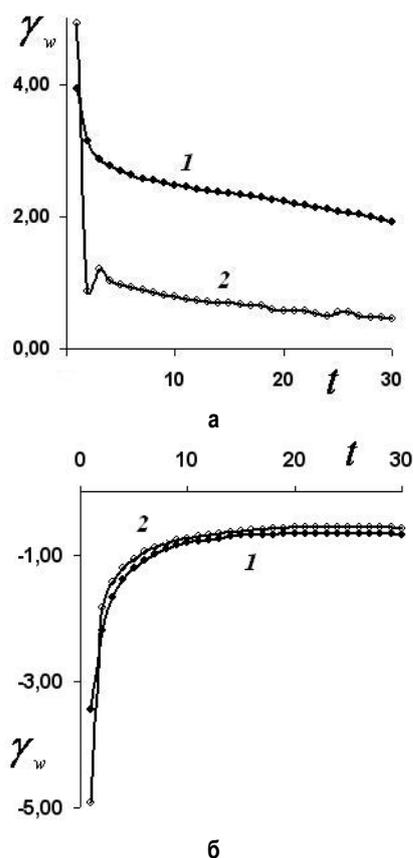


Рис. 10. Интенсивность вихревых следов в точках схода, угол наклона пластинки $\theta = 30^\circ$: а) передняя кромка А; б) задняя кромка В

Таким образом, результаты данного численного исследования показывают, что при решении начально-краевой задачи отрывного обтекания пластинки, начавшей движение с постоянной скоростью из состояния покоя, необходимо учитывать условия схода (т. е. условия (5), (6), (9)) вихревого

следа с кромок пластинки. Включение этих условий в систему соотношений, ведущих к решению рассматриваемой задачи, приводит к корректному определению координат непосредственно сходящихся дискретных вихрей с контура и, как следствие, к определению таких кинематических характеристик течения, как скорости схода и интенсивности вихревых слоев в точках схода. Следует отметить, что интегральные характеристики вихревых следов – их форма – в целом не имеют такой чувствительности к определению координат сходящихся дискретных вихрей, непосредственно сходящихся с контура, как обозначенные выше кинематические величины.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Горелов Д. Н., Говорова А. И. Моделирование начальной стадии отрывного обтекания разомкнутого контура методом дискретных вихрей // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15. № 5. С. 24–33.
- [2] Горелов Д. Н. К постановке нелинейной начально-краевой задачи нестационарного отрывного обтекания профиля // ПМТФ. 2007. Т. 48. № 2. С. 48–56.
- [3] Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 352 с.
- [4] Горелов Д. Н. Методы решения плоских краевых задач теории крыла. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 215 с.
- [5] Сарпкайя Т. Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988) // Тр. Американского общества инж.-мех. Машиностроение. Сер. А. 1989. № 10. С. 1–60.
- [6] Кочин Н. Е., Кибель Е. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1, 2. М.: Физматгиз, 1963.