532.517.4 : 536.24

ТЕПЛООБМЕН У ПРИСОЕДИНЕНИЯ ПОТОКА ПРИ 2-СЛОЙНОЙ МОДЕЛИ БАЛАНСА ТУРБУЛЕНТНОСТИ

И.Е.Лобанов (МАИ)

Аннотация

В работе рассматриваются аспекты теоретической модели интенсифицированного теплообмена в областях присоединения потока при турбулентном течении в каналах с турбулизаторами на базе уравнения баланса турбулентной пульсационной энергии для открытых впадин и для относительно больших и малых высот турбулизаторов. Соответствие расчётных данных и существующих экспериментальных хорошее.

Ключевые слова: *теплообмен, моделирование, поток, присоединение, баланс, турбулентный, пульсационный, энергия.*

1. ВВЕДЕНИЕ

Моделирование интенсифицированного теплообмена при турбулентном течении в каналах с турбулизаторами для открытых впадин и относительно малых высот турбулизаторов очень важно, поскольку именно в этой области имеет место высокий уровень интенсификации теплообмена при относительно незначительном повышении гидравлического сопротивления [1]. В этом случае имеет место отрыв и присоединение потока.

Ранее данный подход применялся для решения задачи о предельном теплообмене при турбулентном течении в каналах за счет турбулизации потока [2, 3].

Ранее в смысле генерирования обобщённой теории рассматривались турбулизаторы потока, высота которых меньше или равна толщине пристенного слоя [9—13]. В этом случае возмущения, сгенерированные турбулизаторами, в ядре потока невелики, следовательно, остается справедливой формула для пути смешения $l = æ \cdot y$ (y — поперечная координата; æ — константа для пути смешения) и логарифмический профиль скорости [4].

В рамках настоящего научного исследования рассматриваются аспекты теории интенсифицированного теплообмена, которая была бы применима и к турбулизаторам бóльших высот, в том числе, больше пристенного слоя.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНТЕНСИФИЦИРОВАННОГО ТЕПЛООБМЕНА В ОБЛАСТЯХ ПРИСОЕДИНЕНИЯ ПОТОКА ПРИ ПРИМЕНЕНИИ УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА ТУРБУЛЕНТНОЙ ПУЛЬСАЦИОННОЙ ЭНЕРГИИ

В областях присоединения потока довольно успешно использовался метод расчёта теплообмена, основанный на решении уравнения баланса пульсационной турбулентной энергии [9—13]. Следует сказать, что методы, реализованные в работах [9—13], имели определённые ограничения, поэтому необходимо разработать такую теорию на основе баланса турбулентной энергии, которая имела бы более широкую общность, чем [9—13].

Необходимость генерирования теории для расчёта теплообмена, основанной на уравнении баланса турбулентной энергии, обусловливается тем, что аналогия Рейнольдса, на базе которой основан расчёт теплообмена при турбулентном течении в трубах, строго говоря, не может быть непосредственно использована для расчёта теплообмена в трубах с дискретными турбулизаторами потока, в том числе, в трубах с диафрагмами, поскольку в критических точках — в областях отрыва и присоединения потока — она нарушается, но справедлива вне вышеуказанных областей.

Для решения задачи о теплообмене в областях присоединения потока с привлечением уравнения баланса турбулентной пульсационной энергии, необходимо сгенерировать расчётную схему потока.

Схема течения в трубах с турбулизаторами представляется следующим образом. Поток на расстоянии от 5 до 8 высот турбулизатора отрывается от турбулизатора высотой *h* и снова присоединяется к гладкой поверхности трубы, образуя область присоединения. В вышеупомянутой области присоединения имеют место сильные пульсации, поэтому к ней можно описать критической точкой, т.е. точкой, где касательные напряжения $\tau_w = 0$, а плотность теплового потока максимальна $q_w = q_w\big|_{\text{MAX}}$.

При отрывном обтекании напряжение трения равно нулю, но турбулентность потока велика и турбулентная энергия диффундирует к стенке, что и обусловливает, в том числе, интенсификацию теплообмена в области присоединения. Экспериментальные данные по измерению напряжения трения на стенке указывают на то, что в областях присоединения потока $\tau_w \approx 0$ при очень незначительном разбросе экспериментальных точек [7, 8, 21].

В критических точках происходит полное нарушение аналогии Рейнольдса, обусловливая то, что эти точки являются идеальными с точки зрения интенсификации теплообмена, обеспечивая в них стремление к нулю значения фактора аналогии Рейнольдса *r* : $r := \frac{\xi}{\mathrm{St}} \to 0$, где St — число Стентона, ξ — коэффициент сопротивления.

В процессе генерирования критических точек имеет место необходимость затраты определённой энергии. Известный эффект превалирующего увеличения теплообмена над увеличением гидравлического сопротивления [1] при относительно малых высотах турбулизаторов можно объяснить положительным влиянием областей отрыва и присоединения потока, в то время как потери энергии, связанные с отрывом потока при относительно малых высотах турбулизаторов довольно незначительны, а при увеличении высоты турбулизаторов эта энергия возрастает и превалирования теплообмена над гидросопротивлением не возникает.

Вышесказанное обусловливает важность рассмотрения вопроса о теплообмене в критических точках для детерминирования интенсифицированного теплообмена в трубах с турбулизаторами.

Как уже отмечалось, в рамках настоящего научного исследования рассматриваются аспекты теории теплообмена в критических точках, которая была бы применима и к турбулизаторам как малых, так и больших высот, в том числе, больше пристенного слоя; в последнем случае высота турбулизаторов будет больше расстояния от стенки трубы до нижней границы турбулентного ядра потока (области логарифмического профиля скорости), а возмущения от турбулизаторов будут интенсивно распространяться на всю толщину пограничного слоя.

Уравнения баланса турбулентной пульсационной энергии для рассматриваемого случая будет иметь следующий вид [14, 15]:

$$\frac{a}{y}k\sqrt{k} - b\frac{d}{dy}\left(y\sqrt{k}\,\frac{dk}{dy}\right) - \frac{\tau}{\rho}\frac{dw_x}{dy} = 0, \qquad (1)$$

где $k = \frac{\left(\overline{w'_x}\right)^2 + \left(\overline{w'_y}\right)^2 + \left(\overline{w'_z}\right)^2}{2}$ — кинетическая энергия турбулентного пульсационного движения; $\overline{w}_x'$, $\overline{w}_y'$, $\overline{w}_z'$ — компоненты пульсационной составляющей скорости; a и b — константы диссипации и диффузии соответственно.

Рассматривается несжимаемая жидкость с постоянными физическими свойствами. Для несжимаемой жидкости с постоянными теплофизическими свойствами турбулентная кинематическая вязкость определяется как:

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu_T \frac{dw_x}{dy}. \tag{2}$$

На основе анализа теории размерностей имеем:

$$\nu_T = yc\sqrt{k}. \tag{3}$$

В отрывных зонах распределение τ аппроксимируется независимо от характера его изменения поперёк турбулентного пограничного слоя следующим образом [16]:

$$\frac{\tau}{\rho} = my, . \tag{4}$$

где m — константа.

При $y = 0$ — $\tau = 0$, что и определяет отрыв потока.

Подставив в (1) выражения (2)—(4), получим дифференциальное уравнение для кинетической энергии турбулентного пульсационного движения в следующем виде:

$$\frac{a}{y} k\sqrt{k} - b\frac{d}{dy}\left(y\sqrt{k}\frac{dk}{dy}\right) - \frac{(ym)^2}{yc\sqrt{k}} = 0. \tag{5}$$

Дифференциальное уравнение относительно кинетической энергии пульсационного движения будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{a}{y} k\sqrt{k} - \frac{m^2 y}{c\sqrt{k}} - b\left(\sqrt{k}\frac{dk}{dy} + \frac{y}{2\sqrt{k}}\left(\frac{dk}{dy}\right)^2 + y\sqrt{k}\frac{d^2k}{dy^2}\right) = 0. \tag{6}$$

Последнее дифференциальное уравнение является нелинейным, поэтому представляется оптимальным в области присоединения потока (а также в области присоединённого пограничного слоя, лежащего от собственно области присоединения до полностью развитого течения) принять линейный характер изменения кинетической энергии пульсационного движения:

$$k(y) = G \cdot y. \tag{7}$$

Подставив (7) в (6), получим следующее уравнение:

$$\frac{a}{y}Gy\sqrt{Gy}-\frac{m^2y}{c\sqrt{Gy}}-b\left(G\sqrt{Gy}+\frac{1}{2}\frac{yG^2}{\sqrt{Gy}}\right)=0\,, \tag{8}$$

решив которое, получаем:

$$G=\pm\frac{2m}{\sqrt{4ca-6bc}}\,. \tag{9}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет физическим условиям, поэтому он должен быть отброшен, следовательно:

$$k(y)=\frac{2m}{\sqrt{4ca-6bc}}\,y\,. \tag{10}$$

В данном исследовании рассматривается двуслойная схема турбулентного потока: турбулентное ядро потока и область непосредственного влияния вязкости.

На границе вязкого подслоя $y=y_0$, а на границе турбулентного ядра — $y=y_1$; соответственно: $k\big|_{y=y_0}=k_0$ и $k\big|_{y=y_1}=k_1$.

Внешняя граница турбулентного ядра y_1 является таким расстоянием от стенки, где нарушается линейное распределение поперёк пристенного слоя кинетической энергии пульсационного движения k.

В районе области присоединения потока уровень турбулентной кинетической энергии k вблизи стенки является повышенным, что обусловливает и повышенный уровень турбулентной кинематической вязкости ν_T.

Значение величины y_0 является такое значение y, при котором величина относительной турбулентной вязкости ν_T/ν становится такой же, как и в гладкой трубе на границе турбулентного и промежуточных областей. Т.к. уровень турбулентности в трубах с турбулизаторами выше, чем в гладких трубах, то абсолютная величина y_0 в трубах с турбулизаторами будет меньше, чем в гладких трубах.

При φ=40 для гладкой трубы — ν_T/ν=16.

В соответствии с (9) или (7) получим:

$$\frac{k_1}{k_0}=\frac{y_1}{y_0}\,. \tag{11}$$

Подставив в (11) выражения для $\nu_T=y\cdot c\cdot k^{1/2}$ и ν_T/ν=16, получим:

$$16\nu=cy_0\sqrt{y_0}\sqrt{\frac{k_1}{y_1}}\,. \tag{12}$$

Далее определим значение комплекса $\dfrac{\overline{w}_x y_0}{\nu}$ в зависимости от числа Рейнольдса $\mathrm{Re}=\frac{\overline{w}_x D}{\nu}$ (D — диаметр трубы; $\overline{w}_x$ — среднерасходная скорость):

$$\frac{\overline{w}_x y_0}{\nu}=\left(\frac{16}{c}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{y_1}{D}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{k_1}}{\overline{w}_x}\right)^{-\frac{2}{3}}\mathrm{Re}^{\frac{1}{3}}. \tag{13}$$

Число Стентона, отнесённое к среднему температурному напору, детерминируем на основании известного соотношения, используемого для расчёта интенсифицированного теплообмена [2; 3; 7—13; 17, 21]:

$$\mathrm{St}=\frac{\left[\dfrac{T_w-T_{\max}}{T_w-\overline{T}}\right]\dfrac{\nu}{\overline{w}_x y_0}}{\displaystyle\int_0^{\frac{y_1}{y_0}}\frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{Pr}}+\dfrac{\nu_T}{\nu}\dfrac{1}{\mathrm{Pr}_T}}\,d\left(\frac{y}{y_0}\right)}, \tag{14}$$

где Pr — число Прандтля; Pr_T — турбулентное число Прандтля; ν — кинематическая вязкость; ν_T — турбулентная кинематическая вязкость; выражение в квадратных скобках — отношение максимального температурного напора к среднему, которое ранее было детерминировано в работах [11—13; 17].

Точные аналитические решения для интегралов, входящих в отношение максимального температурного напора к среднему $\frac{T_w-T_{\max}}{T_w-\overline{T}}=\left(\int_0^1 r\Big/\left(1+\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_T}\frac{\mu_T}{\mu}\right)dr\right)\Big/\left(\int_0^1 r^3\Big/\left(1+\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_T}\frac{\mu_T}{\mu}\right)dr\right)$ ($r=R/R_0$ — безразмерный (или относительный) радиус трубы), входящего в решение задачи об интенсифицированном теплообмене в прямых круглых трубах с турбулизаторами при турбулентном течении при использовании обозначений — $A_1=1-\frac{5}{\mathrm{Re}}\sqrt{\frac{32}{\xi}}$; $A_2=1-\frac{30}{\mathrm{Re}}\sqrt{\frac{32}{\xi}}$; $B_1=\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_T}\frac{\beta_1}{\eta_1^3}\left(\frac{\xi}{32}\right)^2\mathrm{Re}^4$; $B_3=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{\xi}{32}}\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_T}\mathrm{Re}$; $C_2=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{\xi}{32}}\mathrm{Re}$ — выглядят следующим образом:

$$\frac{T_w-T_{\max}}{T_w-\overline{T}}=\frac{\sum_{i=1}^{3}I_i}{\sum_{i=1}^{3}J_i}. \tag{15}$$

$$I_1 = \int\limits_{1-\frac{5}{\mathrm{Re}}\sqrt{\frac{32}{\xi}}}^{1} \frac{r}{1+\frac{\Pr}{\Pr_T}\frac{\beta_1}{\eta_1^3}\left(\frac{\xi}{32}\right)^2 \mathrm{Re}^4(1-r)^4}\,dr =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt[4]{B_1}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(1-A_1)^2+\left(\sqrt{2}/\sqrt[4]{B_1}\right)(1-A_1)+1/\sqrt{B_1}}{(1-A_1)^2-\left(\sqrt{2}/\sqrt[4]{B_1}\right)(1-A_1)+1/\sqrt{B_1}} - \right. \tag{16}$$

$$\left. - \operatorname{arctg}\left[\sqrt{2}\sqrt[4]{B_1}(A_1-1)-1\right] - \operatorname{arctg}\left[\sqrt{2}\sqrt[4]{B_1}(A_1-1)+1\right] - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{B_1}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{B_1}(A_1-1)^2\right]\right].$$

$$I_2 = \int\limits_{1-\frac{30}{\mathrm{Re}}\sqrt{\frac{32}{\xi}}}^{1-\frac{5}{\mathrm{Re}}\sqrt{\frac{32}{\xi}}} \frac{r}{1+\frac{\Pr}{\Pr_T}\left(\frac{1}{5}\sqrt{\frac{\xi}{32}}\,\mathrm{Re}(1-r)-1\right)}\,dr =$$

$$= \frac{\Pr_T}{\Pr C_2^2}\left[\ln\frac{-\Pr_T - \Pr C_2 + \Pr C_2 A_2 + \Pr}{-\Pr_T - \Pr C_2 + \Pr C_2 A_1 + \Pr}\left(C_2 - 1 + \frac{\Pr_T}{\Pr}\right) + C_2(A_2 - A_1)\right]. \tag{17}$$

$$I_3 = \int\limits_{0}^{1-\frac{30}{\mathrm{Re}}\sqrt{\frac{32}{\xi}}} \frac{r}{1+\frac{2}{5}\frac{\Pr}{\Pr_T}\sqrt{\frac{\xi}{32}}\,\mathrm{Re}(1-r)r}\,dr =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{B_3(4+B_3)}}\left[\operatorname{arth}\left[\frac{\sqrt{B_3}}{\sqrt{4+B_3}}(2A_2-1)\right] + \operatorname{arth}\left[\frac{\sqrt{B_3}}{\sqrt{4+B_3}}\right]\right] - \tag{18}$$

$$- \frac{1}{2B_3}\left[\ln\left(B_3A_2^2 - 1 - B_3A_2\right) - \pi i\right].$$

$$J_1 = \int\limits_{1-\frac{5}{\mathrm{Re}}\sqrt{\frac{32}{\xi}}}^{1} \frac{r^3}{1+\frac{\Pr}{\Pr_T}\frac{\beta_1}{\eta_1^3}\left(\frac{\xi}{32}\right)^2 \mathrm{Re}^4(1-r)^4}\,dr = \tag{19}$$

$$= -\frac{1}{4B_1}\left\langle \ln\left(1+B_1-4B_1A_1+6B_1A_1^2-4B_1A_1^3+B_1A_1^4\right) + \right.$$

$$+ \sqrt{2}\sqrt[4]{B_1}\left(\sqrt{B_1}+3\right)\left(\operatorname{arctg}\left[\sqrt{2}\sqrt{B_1}(A_1-1)-1\right] + \operatorname{arctg}\left[\sqrt{2}\sqrt[4]{B_1}(A_1-1)+1\right]\right) +$$

$$+ 6\sqrt{B_1}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{B_1}(A_1-1)^2\right] +$$

$$+\frac{3-\sqrt{B_1}}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{B_1}\,\ln\frac{(1-A_1)^2+\left(\sqrt{2}\big/\sqrt[4]{B_1}\right)(1-A_1)+1\big/\sqrt{B_1}}{(1-A_1)^2-\left(\sqrt{2}\big/\sqrt[4]{B_1}\right)(1-A_1)+1\big/\sqrt{B_1}}\Bigg\rangle .$$

$$J_2=\int\limits_{1-\frac{30}{\mathrm{Re}}\sqrt{\frac{32}{\xi}}}^{1-\frac{5}{\mathrm{Re}}\sqrt{\frac{32}{\xi}}}\frac{r^3}{1+\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_T}\left(\frac{1}{5}\sqrt{\frac{\xi}{32}}\,\mathrm{Re}(1-r)-1\right)}dr=$$

$$=-\frac{\mathrm{Pr}_T}{6\,\mathrm{Pr}^4\,C_2^4}\left\langle\ln\frac{-\mathrm{Pr}_T-\mathrm{Pr}\,C_2+\mathrm{Pr}\,C_2A_1+\mathrm{Pr}}{-\mathrm{Pr}_T-\mathrm{Pr}\,C_2+\mathrm{Pr}\,C_2A_2+\mathrm{Pr}}\times\right. \tag{20}$$

$$\times\left(\mathrm{Pr}^3\,C_2^2(6C_2-18)+18\,\mathrm{Pr}_T\,\mathrm{Pr}\left(\mathrm{Pr}-\mathrm{Pr}_T+6\,\mathrm{Pr}\,C_2^2\right)+18\,\mathrm{Pr}\,C_2\left(\mathrm{Pr}-\mathrm{Pr}_T\right)^2\right)+$$
$$+3\,\mathrm{Pr}^3\,A_2^2C_2^3-12\,\mathrm{Pr}^2\,\mathrm{Pr}_T\,A_2C_2^3-2\,\mathrm{Pr}^3\,\mathrm{Pr}_T\,A_2^3C_2^3-3\,\mathrm{Pr}^3\,A_2^2C_2^3-6\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Pr}_T^2\,A_2C_2+$$
$$+12\,\mathrm{Pr}^2\,\mathrm{Pr}_T\,A_2C_2-6\,\mathrm{Pr}^3\,A_2C_2^3-6\,\mathrm{Pr}^3\,A_2C_2-3\,\mathrm{Pr}^2\,\mathrm{Pr}_T\,A_2^2C_2^2+6\,\mathrm{Pr}^3\,A_1C_2^3+$$
$$+12\,\mathrm{Pr}^3\,A_2C_2^2+2\,\mathrm{Pr}^3\,A_1^3C_2^3+12\,\mathrm{Pr}^2\,\mathrm{Pr}_T\,A_1C_2^2+3\,\mathrm{Pr}^3\,A_1^2C_2^3-12\,\mathrm{Pr}^2\,\mathrm{Pr}_T\,A_1C_2+$$
$$+6\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Pr}_T^2\,A_1C_2-3\,\mathrm{Pr}^3\,\mathrm{Pr}_T^2\,A_1^2C_2^2-12\,\mathrm{Pr}^3\,A_1C_2^2+6\,\mathrm{Pr}^3\,A_1C_2+3\,\mathrm{Pr}^2\,\mathrm{Pr}_T\,A_1^2C_2^2+$$
$$\left.+6\left(\mathrm{Pr}^3-\mathrm{Pr}_T^3\right)\ln\left\{\left(-\mathrm{Pr}_T-\mathrm{Pr}\,C_2+\mathrm{Pr}\,C_2A_2+\mathrm{Pr}\right)\left(-\mathrm{Pr}_T-\mathrm{Pr}\,C_2+\mathrm{Pr}\,C_2A_1+\mathrm{Pr}\right)\right\}\right\rangle .$$

$$J_3=\int\limits_0^{1-\frac{30}{\mathrm{Re}}\sqrt{\frac{32}{\xi}}}\frac{r^3}{1+\frac{2}{5}\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_T}\sqrt{\frac{\xi}{32}}\,\mathrm{Re}(1-r)r}dr=$$

$$=\frac{1+\frac{3}{B_3}}{\sqrt{B_3(4+B_3)}}\left[\mathrm{arth}\left[\frac{\sqrt{B_3}}{\sqrt{4+B_3}}(2A_2-1)\right]+\mathrm{arth}\left[\frac{\sqrt{B_3}}{\sqrt{4+B_3}}\right]\right]-\frac{A_2}{B_3}\left(1+\frac{A_2}{2}\right)-$$

$$-\frac{1+\frac{1}{B_3}}{2B_3}\left[\ln\left(B_3A_2^2-1-B_3A_2\right)-\pi i\right]. \tag{21}$$

Окончательное выражение для числа Стентона получим путём подстановки значения $\frac{\overline{w_x}\,y_0}{\nu}$ из (13) в (14):

$$\mathrm{St}=\frac{\left[\dfrac{T_w-T_{\max}}{T_w-\overline{T}}\right]}{\left[\displaystyle\int_0^{\frac{y_1}{y_0}}\frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{Pr}}+\dfrac{\nu_T}{\nu}\dfrac{1}{\mathrm{Pr}_T}}d\left(\frac{y}{y_0}\right)\right]}\left(\frac{16}{c}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{y_1}{D}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{k_1}}{\overline{w}_x}\right)^{\frac{2}{3}}\mathrm{Re}^{-\frac{1}{3}}. \quad (22)$$

В данном исследовании используем двуслойную схему потока, поэтому интеграл, входящий в (22), можно записать следующим образом:

$$\mathrm{St}=\frac{\left[\dfrac{T_w-T_{\max}}{T_w-\overline{T}}\right]}{\left[\displaystyle\int_1^{\frac{y_1}{y_0}}\frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{Pr}}+\dfrac{\nu_T}{\nu\,\mathrm{Pr}_T}}d\left(\frac{y}{y_0}\right)+\int_0^{1}\frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{Pr}}+\dfrac{\nu_T}{\nu\,\mathrm{Pr}_T}}d\left(\frac{y}{y_0}\right)\right]}\left(\frac{16}{c}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{y_1}{D}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{k_1}}{\overline{w}_x}\right)^{\frac{2}{3}}\mathrm{Re}^{-\frac{1}{3}}. \quad (23)$$

Величина толщины вязкого подслоя в сечении отрыва турбулентного пограничного слоя принимается стандартной $\eta_{\text{В}}=5$ ($\eta=yw_*/\nu$ — безразмерная координата; w_* — скорость трения).

В вязком подслое и в промежуточной области, т.е. при $y > y_0$, распределение величины ν_T/ν происходит так же, как и в гладкой трубе, по закону "четвёртой степени" убывания турбулентной вязкости с расстоянием, а именно:

$$\left(\frac{\nu_T}{\nu}\right)_{\text{В}}=614\left(\frac{y}{y_0}\right)^4, \quad (24)$$

для промежуточного подслоя:

$$\left(\frac{\nu_T}{\nu}\right)_{\text{П}}=8\left(\frac{y}{y_0}\right)-1, \quad (25)$$

для турбулентного ядра потока:

$$\left(\frac{\nu_T}{\nu}\right)_{\text{Т}}=\frac{cy\sqrt{k}}{\nu}. \quad (26)$$

В сечении отрыва турбулентного пограничного слоя безразмерная толщина вязкого подслоя, как показано в работе [18], равна:

$$\eta_{\text{В}}^2=\frac{y^2}{\nu}\frac{\partial w_x}{\partial y}\bigg|_{y=y_{\text{В}}}\approx 57. \quad (27)$$

Иными словами, $\eta_{\text{В}} \approx 7{,}55$. Данное значение, полученное в [18], является ощутимо завышенным, поскольку она была детерминирована в [18] без учёта буферной (промежуточной) области, что подтверждает правильность принятия стандартной величины вязкого подслоя в сечении отрыва турбулентного пограничного слоя.

Теперь необходимо детерминировать величины, входящие в окончательное выражение для числа Стентона (23).

Сопоставление турбулентной вязкости из выражения (3) с турбулентной вязкостью, детерминированной путём вычисления на основании обычного логарифмического профиля скорости для области постоянного напряжения позволяет получить постоянную c:

$$\nu_T = \frac{\tau}{\rho \dfrac{\partial w_x}{\partial y}} = \frac{\tau}{\rho \dfrac{\partial}{\partial y}\left[w_* \left(C_* + \dfrac{1}{\kappa} \ln \dfrac{w_* y}{\nu} \right) \right]} = \kappa w_* y = 2 c w_* y \,, \tag{28}$$

поэтому

$$c = \frac{\kappa}{2} = 0{,}2 \,, \tag{29}$$

что соответствует значению, принятому в [2; 3; 7—13, 21].

Распределение величины турбулентной пульсационной кинетической энергии k, экспериментально детерминированное в [19], указывает на то, что линейность распределения величины k нарушается в районе порядка внешней границы области постоянного напряжения:

$$\eta = \frac{w_* y}{\nu} \cong 400 \div 500 \,. \tag{30}$$

Следовательно,

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{\eta_1}{\eta_0} \cong 10 \div 12{,}25 \,. \tag{31}$$

Для расчёта интенсифицированного теплообмена в точке присоединения принимаем $\dfrac{y_1}{y_0} = 12$.

Ввиду неопределённости в области присоединения пограничного слоя значения w_* (в точке отрыва w_*=0), то абсолютное значение y_1 бессмысленно детерминировать из полученного ранее условия y_1/y_0.

Исходя из данных, приведённых в [19], область постоянного напряжения заканчивается на расстоянии, равном $^1/_5 \div ^1/_{10}$ толщины пограничного слоя, поэтому для прямой круглой трубы величину y_1 можно оценить как:

$$\frac{y_1}{D} \cong 0{,}1 \,. \tag{32}$$

Вышеуказанное значение y_1/D полностью коррелирует с соответствующей рекомендацией, приведённой в [15] на основании анализа экспериментальных данных.

Для детерминирования значения y_0/D следует воспользоваться соотношением относительно величин, которые были определены выше:

$$\frac{y_0}{D} = \left(\frac{y_1}{D}\right) \Big/ \left(\frac{y_1}{y_0}\right). \tag{33}$$

Далее необходимо детерминировать интегралы, входящие в (23), как для вязкого подслоя, так и для турбулентного ядра потока.

Для вязкого подслоя вышеуказанный интеграл будет равен:

$$\int_0^1 \frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{Pr}} + \dfrac{\nu_T}{\nu\,\mathrm{Pr}_T}} d\left(\frac{y}{y_0}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{Pr}} + \dfrac{1}{\mathrm{Pr}_T} 614 \left(\dfrac{y}{y_0}\right)^4} d\left(\frac{y}{y_0}\right). \tag{34}$$

После проведения интегрирования, получим:

$$\int_0^1 \frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{Pr}} + \dfrac{\nu_T}{\nu\,\mathrm{Pr}_T}} d\left(\frac{y}{y_0}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \mathrm{Pr} \sqrt[4]{\frac{1}{614}\frac{\mathrm{Pr}_T}{\mathrm{Pr}}} \times$$

$$\times \left[\ln\left(-1 - \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{1}{614}\frac{\mathrm{Pr}_T}{\mathrm{Pr}}} - \sqrt{\frac{1}{614}\frac{\mathrm{Pr}_T}{\mathrm{Pr}}}\right) - \ln\left(-1 + \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{1}{614}\frac{\mathrm{Pr}_T}{\mathrm{Pr}}} - \sqrt{\frac{1}{614}\frac{\mathrm{Pr}_T}{\mathrm{Pr}}}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt[4]{\dfrac{1}{614}\dfrac{\mathrm{Pr}_T}{\mathrm{Pr}}}}{\sqrt[4]{\dfrac{1}{614}\dfrac{\mathrm{Pr}_T}{\mathrm{Pr}}}}\right) - 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{-\sqrt{2} + \sqrt[4]{\dfrac{1}{614}\dfrac{\mathrm{Pr}_T}{\mathrm{Pr}}}}{\sqrt[4]{\dfrac{1}{614}\dfrac{\mathrm{Pr}_T}{\mathrm{Pr}}}}\right) \right]. \tag{35}$$

Возможно и альтернативное эквивалентное решение для интеграла (34), основанное на использовании гипергеометрической функции (функции Гаусса):

$$\int_0^1 \frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{Pr}} + \dfrac{\nu_T}{\nu\,\mathrm{Pr}_T}} d\left(\frac{y}{y_0}\right) = \mathrm{Pr} \cdot F\left(1, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -614\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_T}\right), \tag{36}$$

где $F(a, b; c; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{l=0}^{k-1} \frac{(a+l)(b+l)}{(1+l)(c+l)} z^k$ — гипергеометрическая функция.

Для турбулентного ядра вышеуказанный интеграл будет равен:

$$\int_1^{\frac{y_1}{y_0}} \frac{1}{\frac{1}{\Pr} + \frac{1}{\Pr_T} \frac{cy\sqrt{k}}{\nu}} d\left(\frac{y}{y_0}\right) = \int_1^{\frac{y_1}{y_0}} \frac{1}{\frac{1}{\Pr} + \frac{1}{\Pr_T} \frac{cy_0\sqrt{k_0}}{\nu} \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{3}{2}}} d\left(\frac{y}{y_0}\right) =$$

$$= \int_1^{\frac{y_1}{y_0}} \frac{1}{\frac{1}{\Pr} + \frac{1}{\Pr_T}\left[c\frac{\sqrt{k_0}}{\overline{w}_x}\frac{y_0}{D}\mathrm{Re}\right]\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{3}{2}}} d\left(\frac{y}{y_0}\right). \tag{37}$$

Введя следующие обозначения:

$$I_a := \frac{1}{\Pr}; \quad I_b := \frac{1}{\Pr_T} c \frac{\sqrt{k_0}}{\overline{w}_x} \frac{y_0}{D} \mathrm{Re}, \tag{38}$$

приведём, после интегрирования, следующую форму записи интеграла (37):

$$\int_1^{\frac{y_1}{y_0}} \frac{1}{\frac{1}{\Pr} + \frac{1}{\Pr_T} \frac{cy\sqrt{k}}{\nu}} d\left(\frac{y}{y_0}\right) = \frac{1}{6} \frac{1}{I_a^{\frac{5}{3}} \sqrt[3]{I_b}} \left[2\ln\left(\sqrt{\frac{y_1}{y_0}} - \sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}}\right) \frac{I_a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{I_b}} + I_a \ln\left(\left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{y_1}{y_0}\left(\frac{I_a}{I_b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{I_a}{I_b}\right)^{\frac{4}{3}}\right)\sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}} - \ln\left(\frac{y_1}{y_0} + \sqrt{\frac{y_1}{y_0}}\sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}} + \left(\frac{I_a}{I_b}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\frac{I_a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{I_b}} +$$

$$+ 2\sqrt{3} I_a \mathrm{arctg}\left(\frac{2\frac{y_1}{y_0} + \left(\frac{I_a}{I_b}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{3}\left(\frac{I_a}{I_b}\right)^{\frac{2}{3}}}\right)\sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}} + 2\sqrt{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{2\sqrt{\frac{y_1}{y_0}} + \sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}}}\right)\frac{I_a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{I_b}} -$$

$$- 2\ln\left(\sqrt{\frac{y_1}{y_0}} + \sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}}\right)\frac{I_a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{I_b}} + \ln\left(\frac{y_1}{y_0} - \sqrt{\frac{y_1}{y_0}}\sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}} + \left(\frac{I_a}{I_b}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\frac{I_a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{I_b}} + \tag{39}$$

$$+2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\sqrt{\frac{y_1}{y_0}}-\sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}}}\right)\frac{I_a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{I_b}}-2I_a\ln\left(\frac{y_1}{y_0}-\left(\frac{I_a}{I_b}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}}-$$

$$-2\ln\left(1-\sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}}\right)\frac{I_a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{I_b}}-I_a\ln\left(1+\left(\frac{I_a}{I_b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{I_a}{I_b}\right)^{\frac{4}{3}}\right)\sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}}+\ln\left(1+\sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}}+\left(\frac{I_a}{I_b}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\frac{I_a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{I_b}}-$$

$$+2\sqrt{3}I_a\mathrm{arctg}\left(\frac{2+\left(\frac{I_a}{I_b}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{3}\left(\frac{I_a}{I_b}\right)^{\frac{2}{3}}}\right)\sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}}-2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2+\sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}}}\right)\frac{I_a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{I_b}}+2\ln\left(1+\sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}}\right)\frac{I_a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{I_b}}-$$

$$\left.-\ln\left(1-\sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}}+\left(\frac{I_a}{I_b}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\frac{I_a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{I_b}}+2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{-2+\sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}}}\right)\frac{I_a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{I_b}}+2I_a\ln\left(1-\left(\frac{I_a}{I_b}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\sqrt[3]{\frac{I_a}{I_b}}\right].$$

Таким образом, расчёт интенсифицированного теплообмена в точке присоединения в трубах с турбулизаторами может быть проведён по формуле (23) с расчётом входящих в неё интегралов по формулам (35) (или (36)) и (39).

Сравнение теоретических расчётных данных по теплообмену в точке присоединения турбулентного пограничного слоя с экспериментальными удобнее сделать так же, как это сделано в работах [7, 8, 21]. Сходные условия теплообмена имеют место для теплообмена в задней критической точке при поперечном обтекании цилиндра [7, 8, 20, 21]:

$$\mathrm{St}=0{,}1\left(\frac{\overline{w}_x D_{\text{Ц}}}{\nu}\right)^{-\frac{1}{3}}=0{,}1\,\mathrm{Re}_D^{-\frac{1}{3}}, \qquad (40)$$

где $\overline{w}_x$ — скорость набегающего потока; $D_{Ц}$ — диаметр цилиндра.

Значения $\frac{\sqrt{k_0}}{\overline{w}_x}$ и $\frac{\sqrt{k_1}}{\overline{w}_x}$ на границах вязкого подслоя и турбулентного ядра соответственно детерминируется так же, как и в работах [2, 3, 7—13, 17, 21], поскольку вышеуказанные зависимости имеют широкую общность:

$$\frac{\sqrt{k_1}}{\overline{w}_x} = 2\sqrt{\frac{\xi}{8}} \frac{1+\ln\left(\frac{h}{R}\frac{\mathrm{Re}}{10}\sqrt{\frac{\xi}{8}}\right)}{\left(1-\frac{h}{R}\right)^2}, \tag{41}$$

где $R=D/2$ — радиус трубы (h/R=1$-d/D$, d — диаметр диафрагмы), Re — число Рейнольдса, ξ — коэффициент сопротивления трению.

В работах [7, 8, 21] приводится формула по $\frac{\sqrt{k_1}}{\overline{w}_x}$ в области присоединения турбулентного пограничного слоя, основанная на обобщении экспериментальных данных для диапазона Re=$10^4 \div 10^5$:

$$\frac{\sqrt{k}}{\overline{w}_x} = 0{,}266\left(\frac{d}{D}\right)^{-2}. \tag{42}$$

Использованная в данном исследовании закономерность является более обоснованной и сложной, чем использованная в [7, 8, 21], что обусловливает её преимущественное применение.

Сравнение сгенерированной теории с экспериментом [7, 8, 20, 21] оптимальнее всего провести для тех условий, для которых было проведено сравнение для других математических моделей [7, 8, 21] — для Re=10^4 и h/R=0,0632 — $\frac{\sqrt{k_1}}{\overline{w}_x} = 0{,}304$ [7, 8, 21] число Стентона составляет St=$4{,}579 \cdot 10^{-3}$, в то время как на основании эксперимента [7, 8, 20, 21] — $\mathrm{St}_{Э}=4{,}642 \cdot 10^{-3}$; ошибка составляет порядка 1,5%, в то время как ошибка расчётной модели, представленной в [7, 8, 21], составила порядка 19% [7, 8, 21].

Следовательно, сгенерированная в данном научном исследовании теоретическая модель для расчёта интенсифицированного теплообмена в точке присоединения турбулентного пограничного слоя практически на порядок точнее существующей [7, 8, 21], однако полученные в работе окончательные расчётные зависимости гораздо сложнее существующих [7, 8, 21], что не важно при современном уровне развития вычислительной техники.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В исследовании сгенерирована теоретическая модель на базе уравнения баланса турбулентной пульсационной энергии, позволяющая теоретическим образом детерминировать интенсифицированный теплообмен при турбулентном течении в каналах с турбулизаторами для большого диапазона высот турбулизаторов в области присоединении турбулентного пограничного слоя. Получена их удовлетворительная корреляция с существующими независимыми экспериментальными данными. Сгенерированная теория гораздо точнее, использует меньшее число допущений и лучше соответствует имеющемуся экспериментальному материалу, чем существующие теории [7, 8, 21].

Показано, что решение уравнения баланса турбулентной энергии для расчёта теплообмена в каналах со сложной гидрогазодинамикой, в том числе, в точке присоединения турбулентного пограничного слоя, является прогрессивным направлением в теории интенсифицированного конвективного теплообмена, поскольку оно позволяет получить надёжные расчетные методики в тех случаях, когда имеет место нарушение аналоги Рейнольдса.

Разработанная теория указывает на то, что необходима дальнейшая работа в направлении её развития и перехода от двуслойной модели потока к трёхслойной, которая позволит детерминировать теплообмен в точке присоединения турбулентного пограничного слоя в более широком диапазоне определяющих параметров и с большей точностью, чем для существующих моделей.

Решение теоретической задачи о теплообмене в области присоединения турбулентного пограничного слоя обусловливает потенциальное решение задачи о теплообмене и для всей области после присоединения турбулентного пограничного слоя (присоединённый пограничный слой): от точки присоединения турбулентного пограничного слоя вплоть до полностью развитого течения (до стабилизированного течения).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эффективные поверхности теплообмена / Э.К.Калинин, Г.А.Дрейцер, И.З.Копп и др. — М.: Энергоатомиздат, 1998. — 408 с.
2. Лобанов И.Е. Моделирование предельного изотермического теплообмена при турбулентном течении в каналах за счет турбулизации потока на базе уравнения баланса турбулентной пульсационной энергии // Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках: Труды XV Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И.Леонтьева. — М., МЭИ, 2005. — Т.1. — С. 99—102.

3. Лобанов И.Е. Предельный теплообмен при турбулентном течении в каналах за счет турбулизации потока на базе уравнения баланса турбулентной пульсационной энергии // Труды Четвертой Российской национальной конференции по теплообмену. В 8 томах. Т. 2. . Вынужденная конвекция однофазной жидкости. — М., 2002. — С. 191—194.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.
5. Webb R.L., Eckept E.R. and Goldstein R.J. Heat Transfer and friction in tubes with Repeated—Rib Ronghness // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1971. — Vol.14. — № 4. — P.601—617.
6. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. — М.: Атомиздат, 1979. — 416 с.
7. Мигай В.К. Повышение эффективности современных теплообменников. — Л.: Энергия. Ленинградское отделение, 1980. — 144 с.
8. Мигай В.К. Моделирование теплообменного энергетического оборудования. — Л.: Энергоатомиздат. Ленинградское отделение, 1987. — 263 с.
9. Лобанов И.Е., Мякочин А.С., Низовитин А.А. Моделирование интенсифицированного теплообмена при турбулентном течении в трубах с турбулизаторами на базе уравнения баланса турбулентной пульсационной энергии // Вестник МАИ. — 2007. — Т. 14. — № 4. — С. 13—22.
10. Лобанов И.Е., Парамонов Н.В. Математическое моделирование теплообмена в трубах с турбулизаторами при турбулентном течении на основе уравнения баланса турбулентной пульсационной энергии // Труды Пятой Российской национальной конференции по теплообмену. В 8 томах. Том 2. Вынужденная конвекция однофазной жидкости. — М.: МЭИ, 2010. — С. 162—165.
11. Лобанов И.Е. Применение уравнения баланса турбулентной пульсационной энергии для математического моделирования интенсифицированного теплообмена при турбулентном течении в трубах с турбулизаторами // Авиакосмическое приборостроение. — 2011. — № 5. — С. 19—24.
12. Лобанов И.Е. Теория интенсифицированного теплообмена при турбулентном течении в трубах с турбулизаторами на базе уравнения баланса турбулентной пульсационной энергии // Материалы IX Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2012), 25—31 мая 2012 г., Алушта. — М.: Издательство МАИ, 2012. — С. 245—247.
13. Лобанов И.Е. Теория интенсифицированного теплообмена при турбулентном течении в трубах с турбулизаторами на основе уравнения баланса турбулент-

ной пульсационной энергии // Отраслевые аспекты технических наук. — 2012. — № 5. — С. 7—14.
14. Praudte L. Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz // Nachrichten der Akad. Wiss. — Göttingen: Mathphys, 1945. — P. 6.
15. Spolding D.B. Heat transfer for turblent separated flows // Journal Fluid Mechanics. — 1967. — Vol. 27. — Part 1. — P. 97—109.
16. Гинзбург И.П. Теория сопротивления и теплопередачи. — Л.: ЛГУ, 1970. — 375 с.
17. Лобанов И.Е., Штейн Л.М. Перспективные теплообменные аппараты с интенсифицированным теплообменом для металлургического производства. (Общая теория интенсифицированного теплообмена для теплообменных аппаратов, применяемых в современном металлургическом производстве.) В 4-х томах. Том IV. Специальные аспекты математического моделирования гидрогазодинамики, теплообмена, а также теплопередачи в теплообменных аппаратах с интенсифицированным теплообменом. – М.: МГАКХиС, 2011. – 343 с.
18. Кутателадзе С.С., Леонтьев А.И. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. — М.: Энергоатомиздат, 1985. — 320 с.
19. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом, Издательство иностранной литературы, 1959. — 399 с.
20. Richardson P.D. Heat and mass transfer in turbulent separated flows // Chem. Engng. Sc. — 1963. — Vol. 18. — P. 149.
21. Мигай В.К. К теории теплообмена в турбулентном потоке с отрывом // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1976. — № 2. — С. 170—171.